

Infos : - Exercices corrigés en retour

- Salle d'exo de ce jeudi : CM 1106 remplacée par CM 1105

Rappel E fermé borné, $f \in C^0(E)$, f prend son min & max sur E .

Méthode : $\nabla f(x, y) = 0$, $(x, y) \in \text{int} E$
min max de f sur ∂E

A ne garder que les valeurs qui sont obtenues par $f(x, y)$ avec $(x, y) \in E$

si $\partial E = g^{-1}(\{0\})$, méthode par multiplicateurs substitution, de Lagrange. paramétrisation
→ Comparaison

→ $g_i : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$,

min/max de g_i est parmi $g_i'(x) = 0$, $g_i(a)$, $g_i(b)$.

Example 6.19: (Suite)

Soit $f(x,y) = \frac{1}{3}x^3 + xy^2 - x$, $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0, y-x \leq 2, x+y \leq 2\}$

pts stationnaires

$$\nabla f(x,y) = (x^2 + y^2 - 1, 2xy) = 0 \Leftrightarrow$$

$(x,y) = (0,-1)$ Pas dans $E \rightarrow$ oublier

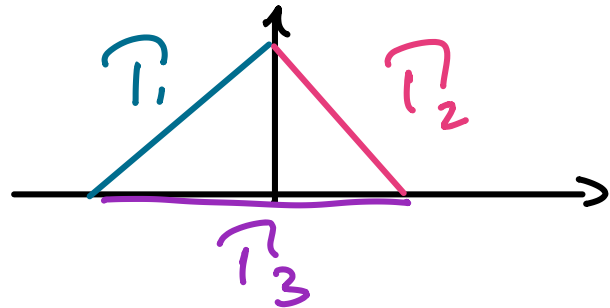
$(x,y) = (0,1)$ $f(0,1) = 0$

sur ∂E , pas
nécessaire de garder.

$(x,y) = (-1,0)$ $f(-1,0) = \frac{2}{3}$

$(x,y) = (1,0)$ $f(1,0) = -\frac{2}{3}$

∂E :



$$g_1: [-2,0] \rightarrow \mathbb{R}, \quad g_1'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{3}{2} \text{ ou } -\frac{1}{2}$$

$$g_1(-\frac{3}{2}) = 0, \quad g_1(-\frac{1}{2}) = -\frac{2}{3}, \quad g_1(-2) = -\frac{2}{3}, \quad g_1(0) = 0$$

$$T_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0, y-x \leq 2, x+y=2\}$$

$$y \geq 0 \Leftrightarrow 2-x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 2,$$

$$y-x \leq 2 \Leftrightarrow 2-2x \leq 2 \Leftrightarrow x \geq 0$$

$$\hookrightarrow y = 2-x$$

$$g_2: [0,2] \rightarrow \mathbb{R} \text{ définie par}$$

$$g_2(x) = f(x, 2-x) = \frac{4}{3}x^3 - 4x^2 + 3x.$$

$$g_2'(x) = 0 \iff 4x^2 - 8x + 3 = 0 \iff x = \frac{1}{2}, \text{ ou } x = \frac{3}{2}.$$

$$\frac{1}{2} \in [0, 2] \rightarrow g_2\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{3}, \quad \frac{3}{2} \in [0, 2], \rightarrow g_2\left(\frac{3}{2}\right) = 0$$

$$g_2(0) = 0, \quad g_2(2) = \frac{2}{3}$$

$$\mathcal{T}_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0, \ y - x \leq 2, \ y + x \leq 2\}$$

$$\downarrow$$

$$y = 0$$

$$y - x \leq 2 \iff -x \leq 2 \iff x \geq -2$$

$$y + x \leq 2 \iff x \leq 2$$

$$g_3: [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R} \text{ définie par } g_3(x) = f(x, 0) = \frac{1}{3}x^3 - x.$$

$$g_3'(x) = 0 \iff x^2 - 1 = 0 \iff x = -1, \text{ ou } x = +1$$

$$-1 \in [-2, 2] \rightarrow g_3(-1) = \frac{2}{3}, \quad 1 \in [-2, 2] \rightarrow g_3(1) = -\frac{2}{3}$$

$$g_3(-2) = -\frac{2}{3}, \quad g_3(2) = \frac{2}{3}$$

Conclusion :

$$\begin{aligned} \max_{(x,y) \in E} f(x,y) &= \max \left\{ -\frac{2}{3}, 0, \frac{2}{3} \right\} \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \min_{(x,y) \in E} f(x,y) &= \min \left\{ -\frac{2}{3}, 0, \frac{2}{3} \right\} \\ &= -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

Remarque :

$$g_3(-1) = f(-1, 0)$$

$(-1, 0)$ pts stationnaire sur ∂E
réapparaît dans l'étude
de ∂E .

$$g_3(1) = f(1, 0) \quad \text{idem}$$

Chapitre 7 : Les intégrales multiples

§ 7.1 : Intégrales doubles sur des rectangles et des domaines simples.

Définition 7.1

(i) Soit $a < b$, $c < d$, $E = [a, b] \times [c, d]$ et $f \in C^0(E)$

l'intégrale double de f sur E est

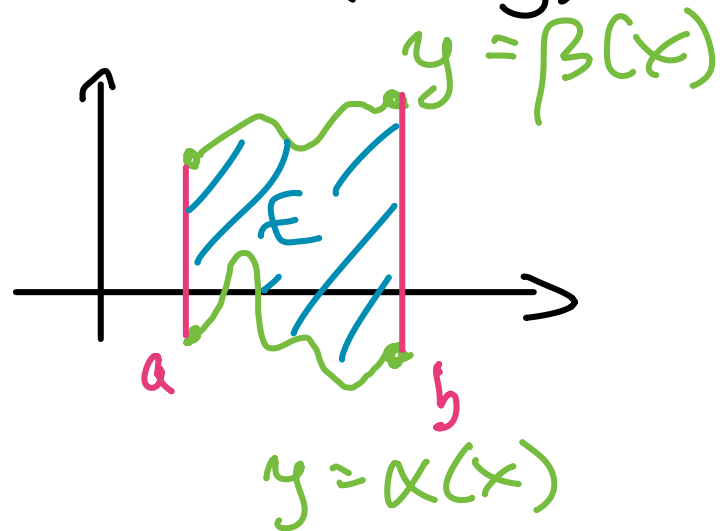
$$\iint_E f(x, y) dx dy = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy.$$

(ii) Soit $E \subseteq \mathbb{R}^2$ un ensemble fermé borné. E est y-simple

si $\exists a < b$, $\alpha, \beta: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continues telles que

- $\forall x \in]a, b[, \alpha(x) < \beta(x)$

- $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a, b], \alpha(x) \leq y \leq \beta(x)\}$



Soit encore $f \in C^0(E)$ L'intégrale de f sur E est

$$\iint_E f(x, y) dx dy = \int_a^b \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y) dy dx$$

Δ $\int_a^b \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y) dx dy$ ne dépend pas de x

(iii) Soit $E \subset \mathbb{R}^2$ fermé borné. Est x-simple
si $\exists c < d$, $\gamma, \delta: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ continues tq

$$\bullet \forall y \in]c, d[, \gamma(y) < \delta(y)$$

$$\bullet E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [c, d], \gamma(y) \leq x \leq \delta(y)\}.$$

Soit encore $f \in C^0(E)$. L'intégrale de f sur E est
alors

$$\iint_E f(x, y) dx dy = \int_c^d \int_{\gamma(y)}^{\delta(y)} f(x, y) dx dy$$

Remarque 7.2 :

Beaucoup d'ensembles sont à la fois x-simples & y-simples. Les deux définitions coïncident alors.

Exemple 2.3

(i) $E = [0, 1] \times [3, 5]$, $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = x^2 + 4xy + \frac{1}{2}y$$

$$\iint_E f(x, y) dx dy = \int_0^1 \int_3^5 x^2 + 4xy + \frac{1}{2}y dy dx$$

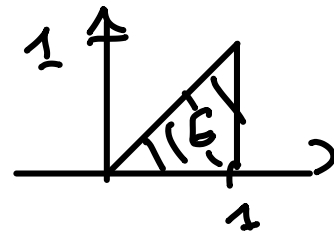
$$= \int_0^1 \left[x^2 y + 2xy^2 + \frac{1}{4}y^2 \right]_{y=3}^{y=5} dx$$

$$= \int_0^1 2x^2 + 32x + 4 dx = \left[\frac{2}{3}x^3 + 16x^2 + 4x \right]_0^1 = \frac{2}{3} + 20$$

(ii) $E = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2; x \in [0, 1], 0 \leq y \leq x \}$

$x \in [a, b]$ avec $a=0, b=1$

$\alpha(x) \leq y \leq \beta(x)$ avec $\alpha(x)=0, \beta(x)=x$.



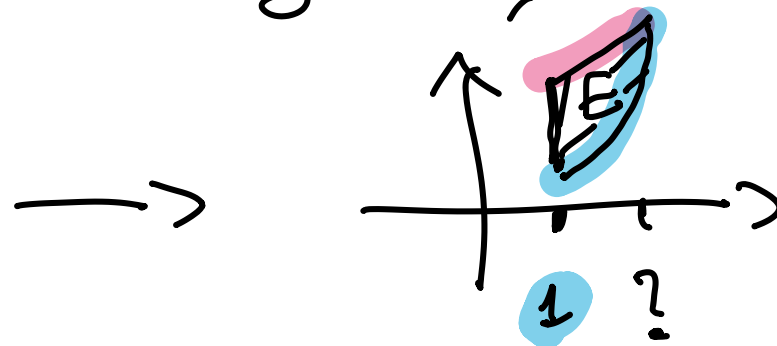
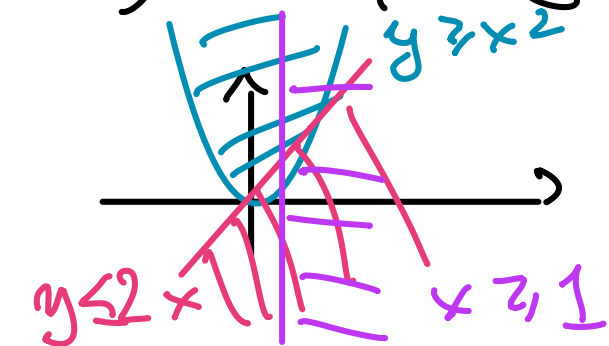
$f(x, y) = x \cdot y$. Est y simple!

$$\iint_E f(x, y) dx dy = \int_0^1 \int_0^x x y dy dx = \int_0^1 \left[\frac{1}{2} x y^2 \right]_{y=0}^{y=x} dx$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{2} x^3 dx = \frac{1}{8}$$

Noter que $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [0, 1], y \leq x \leq 1\}$
est également x -simple avec $[c, d] = [0, 1]$, $f(y) = y$,
 $g(y) = 1$.

(iii) $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \leq y \leq 2x, x \geq 1\}$, $f(x, y) = \frac{2}{x}$.



pour trouver ? , 2 possibi-
lités : graphiquement

? = x plus grand que 1 où les graphes de $y=x^2$ et $y=2x$ se croisent ($x^2=2x \Leftrightarrow x=0$ ou $x=2$)

ou mathématiquement.

$$x^2 \leq y \leq 2x \Rightarrow x^2 \leq 2x \Rightarrow x^2 - 2x \leq 0, \quad x(x-2) \leq 0$$
$$\Rightarrow x \in [0, 2] \text{ et } x \geq 1 \Leftrightarrow x \in [1, 2]. \quad x \in [0, 2]$$

$$\iint_E f(x, y) dx dy = \int_1^2 \int_{x^2}^{2x} \frac{2}{x} dy dx = \int_1^2 \frac{2(2x - x^2)}{x} dx$$
$$= \int_1^2 4 - 2x dx = [4x - x^2]_1^2 = (8 - 4 - (4 - 1)) = 1$$

Exemples 7.4 Permuter des intégrales pour les ensembles
simples.

(i) Calculons
$$I = \int_0^1 \int_{x^2}^1 \frac{x^{37}}{1+y^{20}} dy dx$$

$$\int \frac{1}{1+y^{20}} dy = ???$$

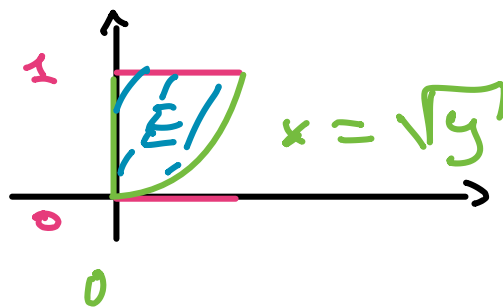
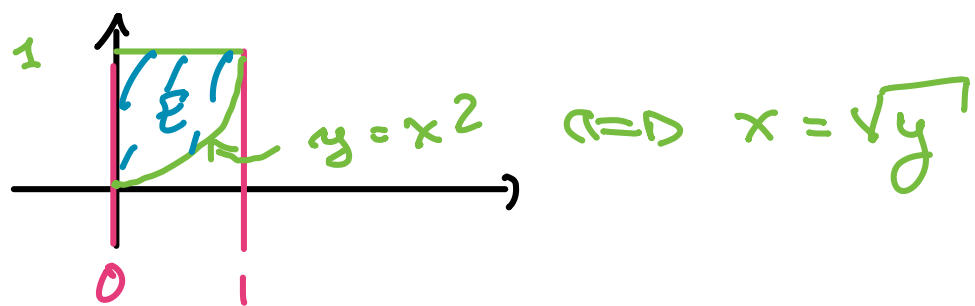
→ problème : on doit commencer
par l'intégrale en y :-/

$$\int x^{37} dx = \frac{1}{38} x^{38}$$

→ Solution : réécrire cette intégrale
en une intégrale sur un ensemble x -simple

$$I = \iint_E f(x,y) dx dy \quad \text{avec } f(x,y) = \frac{x^{37}}{1+y^{20}} \quad \Delta \quad E = \{(x,y) : \begin{array}{l} x \in [0,1] \\ x^2 \leq y \leq 1 \end{array}\}$$

y -simple!



$$E = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [0, 1], 0 \leq x \leq \sqrt{y} \}$$

⚠ erreur possible $0 \leq x \leq \sqrt{y}$ ou $\sqrt{y} \leq x \leq 1$?

$(x, y) = (0, 1)$

$0 \leq 0 \leq 1 \checkmark$

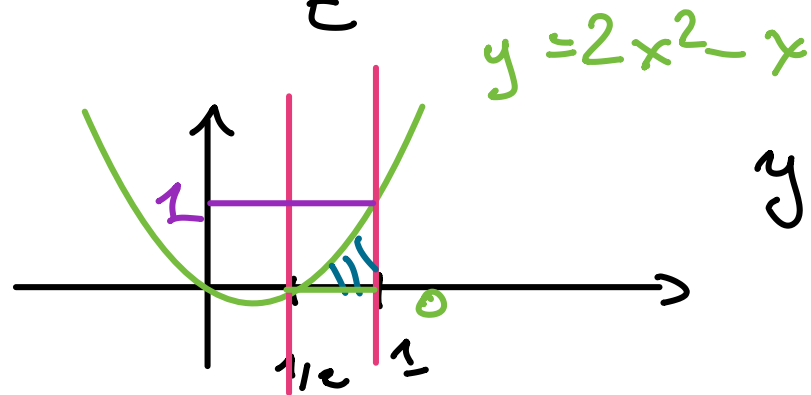
$1 \not\leq 0 \leq 1 \times$

$$I = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{y}} \frac{x^{37}}{1+y^{20}} dx dy = \frac{1}{38} \int_0^1 \frac{1}{1+y^{20}} [x^{38}]_{x=0}^{x=\sqrt{y}} dy$$

$$= \frac{1}{38} \int_0^1 \frac{y^{19}}{1+y^{20}} dy = \frac{1}{38 \cdot 20} [\log(1+y^{20})]_0^1 = \frac{\log(2)}{38 \cdot 20}$$

(ii) Calculer $\bar{I} = \int_{1/2}^1 \int_0^{2x^2-x} (8x-2) \cos(2y-y^3) dy dx.$

$= \iint_E (8x-2) \cos(2y-y^2) dx dy$ avec $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{2} \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2x^2-x\}$

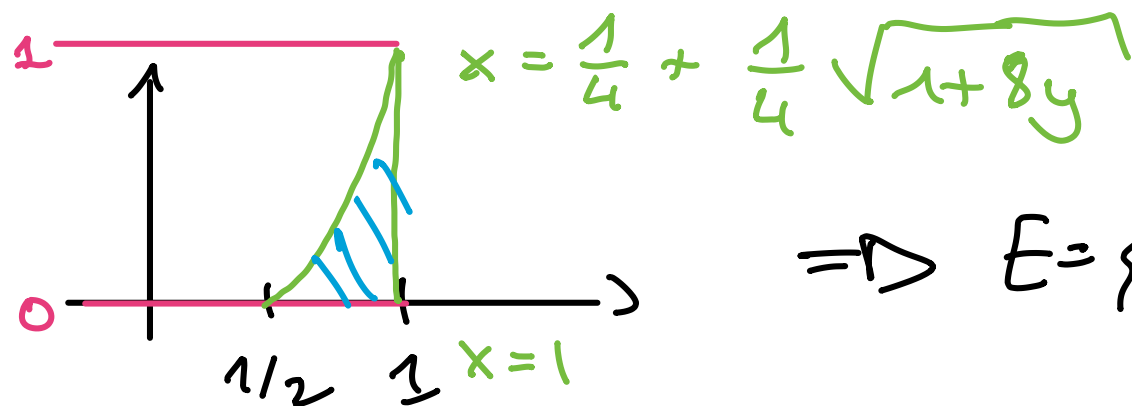


$y = 2x^2 - x \Leftrightarrow 2x^2 - x - y = 0$

$\Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8y}}{4}$

$x \geq \frac{1}{2} \Rightarrow \text{"}\pm\text{"} = \text{"}+\text{"}$

$x = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \sqrt{1+8y}$



$\Rightarrow E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 1, \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \sqrt{1+8y} \leq x \leq 1\}$

$$\Rightarrow \underline{I} = \int_0^1 \int_{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{1+8y}}^1 (8x-2) \cos(2y-y^2) \, dx \, dy$$

$$= \int_0^1 \cos(2y-y^2) \left[4x^2 - 2x \right]_{x=\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{1+8y}}^{x=1} dy$$

$$= \int_0^1 \cos(2y-y^2) \left(4-2 - 4\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{1+8y}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{1+8y}\right) \right) dy$$

= ...

$$= \int_0^1 \cos(2y-y^2) (2-2y) dy = \left[\sin(2y-y^2) \right]_{y=0}^{y=1}$$

$$= \sin(1)$$

Proposition 7.5 Propriétés algébriques de $\iint$

Soient $E \subseteq \mathbb{R}^2$ un fermé, borné, $f, g \in C^0(E)$

$$\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad E_1, E_2 \subseteq E \text{ tq } \text{int } E_1 \cap \text{int } E_2 = \emptyset$$

Alors,

$$(i) \iint_E \alpha f(x, y) + \beta g(x, y) dx dy = \alpha \iint_E f(x, y) dx dy + \beta \iint_E g(x, y) dx dy$$

$$(ii) \iint_{E_1 \cup E_2} f(x, y) dx dy = \iint_{E_1} f(x, y) dx dy + \iint_{E_2} f(x, y) dx dy.$$

$n=1$

$$\int_{[a,b]} f(x) dx = \int_a^b f(x) dx. \quad \int_{[a,c]} f(x) dx = \int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx$$

$[a, b]$ $[b, c]$

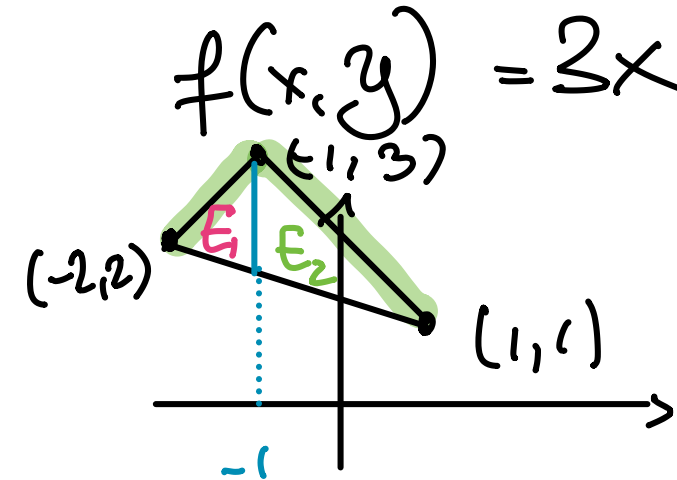
(iii) si $f \leq g$, $\iint_E f(x,y) dx dy \leq \iint_E g(x,y) dx dy$.

(iv) si $f \geq 0$, $\iint_{E_1} f(x,y) dx dy \leq \iint_E f(x,y) dx dy$

Exemple 7.6 : Découpage.

(i) soit $E = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq -\frac{1}{3}x + \frac{4}{3}, y \leq -x+2, y \leq x+4 \}$

$f(x,y) = 2x$



$E_1 = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-2, -1], -\frac{1}{3}x + \frac{4}{3} \leq y \leq x+4 \}$

$E_2 = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-1, 1], -\frac{1}{3}x + \frac{4}{3} \leq y \leq -x+2 \}$